Компактная схема для уравнения Эйлера – Хопфа

Уравнение  или  (1) можно записать в виде линейного соотношения:  с подстановкой . Явная схема Эйлера:

 (2).

Реализовать легко. Но она неустойчива и имеет 1 порядок аппроксимации по времени.

Компактная схема для линейного соотношения на двух (для *u* и *f*) шаблонах :



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Это решение получается из СЛАУ:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № |  |  | Уравнение |
| 1 | 1 | 0 |  |
| 2 | 0 | 1 |  |
| 3 | 0 | *t* |  |
| 4 | *t* | *x* |  |
| 5 |  | *2tx* |  |
| 6 | *x* | 0 |  |
| 7 |  | 0 |  |
| 8 |  |  |  |
| 9 | t | /3 |  |
| 10 | x | t |  |
| 11 |  |  |  |
| 12 | Нормировочное условие | |  |

Замечание. Однородная часть СЛАУ вырождена. Наше решение получается, если дополнительно предположить кососимметрию коэффициентов: 

Итак, компактная схема дает соотношение в произвольной точке сетки:



Подставим вместо *f* ее представление :

 (3)

Схема точная, но как решить нелинейную (квадратичную) систему алгебраических уравнений? Линеаризация! Пусть

 (4)

где первое слагаемое получено по явной схеме Эйлера (2), а второе – малая поправка к первому слагаемому. При подстановке в (3) квадратами малых величин пренебрегаем.

Тогда получаем из (3) СЛАУ относительно малых поправок , где в левой части трехдиагональная матрица с элементами: .

При достаточно малых шагах по времени  в такой матрице будет доминировать главная диагональ.

После определения неизвестных  подставляем их в формулу (4). Теперь можно снова делать шаг по явной схеме Эйлера.

Замечание 1. Малость  необходимо контролировать на каждом шаге. Если они не слишком малы, стоит сделать вторую итерацию для нахождения второй поправки.

Замечание 2. При приближении решения к моменту градиентной катастрофы, следует опасаться вычислительных осцилляций решения. При возникновении «пилы» нужно применять к решению оператор сглаживания.

Замечание 3. Вместо схемы Эйлера на первом шаге можно использовать Лакса – Вендроффа или Мак-Кормака. Они условно устойчивы и поточнее, чем Эйлер.

Замечание 4. В уравнении Эйлера – Хопфа . Для другого вида *f* будут другие уравнения. Но метод линеаризации и применения компактной схемы остается применимым.